第27卷 第2期
2010年04月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 2
Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0249-09

定常Navier-Stokes方程低阶混合有限元的压力投影稳定化方法*

王爱文[1]， 李 剑[2]， 谢冬秀[1]

(1- 北京信息科技大学数学系，北京 100192； 2- 宝鸡文理学院数学系，宝鸡 721007)

摘 要: 针对低阶协调有限元对Q_1-P_0, P_1-P_0，对二维定常不可压缩Navier-Stokes方程，提出了建立在局部压力投影上的一类稳定化有限元方法。与其它的稳定化方法相比，稳定项不需要介入稳定化参数，不用进行高阶导数的运算，或者边界积分，稳定在局部单元上进行，且容易编程实现。针对稳定化有限元逼近解，证明了最优的误差估计。数值实验表明，该方法有很好的稳定性和收敛性。

关键词: Navier-Stokes方程；稳定化有限元算法；低阶有限元对；局部压力投影

分类号: **AMS**(2000) 35Q30　　**中图分类号**: O241.82　　**文献标识码**: A

1 引言

对于粘性不可压缩流动的Navier-Stokes方程，其混合有限元方法的研究一直是一个热点问题。为了获得收敛稳定的有限元逼近，通常的速度/压力空间组合要求满足Babuška-Brezzi稳定性条件(下面简称B-B条件)。众所周知，低阶协调元P_1-P_0(速度线性，压力常数)三角元和Q_1-P_0(速度分片双线性，压力分片常数)四边形元是不稳定的。虽然它们不满足B-B条件，但是，它们有着简单的、正则的数据结构；而且，从计算机实现的角度来看，所解决的三维问题代数方程组规模小，带宽窄。因此，低阶协调元空间在工程实际应用上仍受到人们的关注。

为了去掉B-B条件的限制，针对低阶协调有限元对，有限元专家提出了很多的稳定化方法[1-6]。但是，有些方法的结果依赖于稳定化参数的选取，有些方法还涉及到压力的高阶导数，边界积分和网格的相互嵌套等，比如文献[5,6]针对Q_1-P_0元提出了局部/全局的压力跳跃形式，此种方法通过添加压力在元素边界上的跳跃项来克服B-B条件的限制，但是，对于给定的网格剖分，很难选取最优的稳定化参数。

最近，Bochev等[7]人针对低阶P_1/P_1, Q_1/Q_1, P_1/P_0, Q_1/P_0元，给出了Stokes方程的压力投影稳定化方法的理论分析，这种方法不同于现有的稳定化方法，稳定项不需要介入稳定化参数，不用进行高阶导数的运算，或者边界积分，稳定在局部单元上进行，且容易编程实现。本文主要针对Q_1-P_0，P_1-P_0元，将这种压力投影稳定化方法推广到定常Navier-Stokes方程；推导出最优的误差估计；数值实验表明，该算法有很好的稳定性和收敛性。

收稿日期: 2008-07-22. **作者简介**: 王爱文(1976年12月生)，女，硕士，讲师. 研究方向：偏微分方程数值解.

*__基金项目__: 国家自然科学基金(10701001)；北京市教学名师建设项目(61N0810810)；北京信息科技大学校基金(5026010945)；北京市教委科技创新平台基金(PXM2008-014224-067420).

2 定常 Navier-Stokes 方程的基本理论

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界区域，有 Lipschitz 连续边界 Γ。粘性不可压缩流体的的运动规律可由如下的 Navier-Stokes 方程

$$-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \quad \forall\, x\in\Omega, \tag{1}$$

$$\mathrm{div} u = 0, \quad \forall\, x\in\Omega, \quad u\,|\,\Gamma = 0 \tag{2}$$

进行描述，其中 $u=(u_1,u_2)$ 表示速度向量，p 是压力，f 是外力密度，$\nu>0$ 是粘性系数。

为了引进 Navier-Stokes 方程的变分形式，引进下列 Sobolev 空间

$$X = H_0^1(\Omega)^2, \quad Y = L^2(\Omega)^2, \quad D(A) = H^2(\Omega)^2\cap X,$$
$$M = L_0^2(\Omega) = \Big\{\, q\in L^2(\Omega); \int_\Omega q(x)\mathrm{d}x = 0\,\Big\},$$

X 上装备有通常的内积和范数

$$\big((u,v)\big) = (\mathrm{grad}u,\, \mathrm{grad}v), \quad |u| = \big((u,u)\big)^{1/2},$$

其中 $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|_0$ 表示 $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^2$ 上的内积和范数，$\|\cdot\|_i$ 是 Sobolev 空间 $H^i(\Omega)$ 或 $H^i(\Omega)^2$ $(i=1,2)$ 中的范数。由于 $H_0^1(\Omega)^2$ 中的半范和全范是等价的，下面文章中的半范与全范都用 $\|\cdot\|_1$ 表示。

在 $X\times X$ 和 $X\times M$ 上分别定义连续的双线形形式

$$a(u,v) = \nu\big((u,v)\big), \quad \forall\, u,v\in X, \quad b(v,q) = (\mathrm{div}v, q), \quad \forall\, v\in X, \quad q\in M$$

和 $(X\times M)\times(X\times M)$ 上广义的双线性形式

$$\mathcal{B}\big((u,p);(v,q)\big) = a(u,v) - b(v,p) + b(u,q), \quad \forall\,(u,p),(v,q)\in(X,M),$$

引进三线性形式

$$b(u,v,w) = \int_\Omega (u\cdot\nabla)v\cdot w\mathrm{d}x, \quad \forall\, u,v,w\in X,$$

并给出以下列估计式

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v), \quad \forall\, u\in V, \quad v,w\in X, \tag{3}$$

$$|b(u,v,w)| \le \frac{1}{2}c_0\|u\|_0^{\frac12}\|u\|_1^{\frac12}\big(\|v\|_1\|w\|_0^{\frac12}\|w\|_1^{\frac12} + \|v\|_0^{\frac12}\|v\|_1^{\frac12}\|w\|_1\big), \quad \forall\, u,v,w\in X, \tag{4}$$

$$|b(u,v,w)| + |b(v,u,w)| + |b(w,u,v)| \le c_1\|u\|_1\|v\|_2\|w\|_0, \quad \forall\, lu\in X,\ v\in D(A),\ w\in Y, \tag{5}$$

庞加莱不等式成立

$$\|v\|_0 \le \gamma_0\|v\|_1, \tag{6}$$

这里 c_i, $i=0,1$，γ_0 是依赖于 Ω 的常数。下面文章中出现的常数 κ 都依赖于 (ν,Ω,f)，不同的地方代表的值不同。

对任意给定的 $f \in Y$，(1)-(2) 的变分形式是：求解 $(u,p) \in X \times M$，使得

$$\mathcal{B}\big((u,p);(v,q)\big) + b(u,u,v) = (f,v), \quad \forall\,(v,q) \in (X,M). \tag{7}$$

定理 2.1[5,8]　假设 $\nu > 0$ 和 $f \in Y$ 满足下面的唯一性条件

$$1 - \frac{c_0\gamma_0^2}{\nu^2}\|f\|_0 > 0, \tag{8}$$

则变分问题 (7) 有唯一的解 $(u,p) \in (D(A) \cap X,\ H^1(\Omega) \cap M)$ 且满足

$$\|u\|_1 \le \frac{\gamma_0}{\nu}\|f\|_0, \quad \|u\|_2 + \|p\|_1 \le \kappa\|f\|_0. \tag{9}$$

3　稳定化有限元算法

对任意的 $h > 0$，令 τ_h 为 $\overline{\Omega}$ 将划分成闭的三角形或四边形 K 的一个剖分，设其满足通常的正则性条件：即存在常数 $\sigma > 1$ 和 $0 << \omega < 1$，使得

$$h_k \le \sigma\rho_k, \quad |\cos\theta_{ik}| \le \omega, \quad i = 1,2,3,4, \quad \forall\,K \in \tau_h.$$

这里 h_k 为单元 K 的直径，ρ_k 为单元 K 的内切圆的直径，θ_{ik} 为四边形单元剖分情形下的 K 内角。定义网格参数 $h = \max\limits_{k\in\tau_h} h_K$，定义全部单元之间的内边界所组成的集合为 Γ_h，并赋予如下的范数

$$\|u\|_{\Gamma_h} = \Big(\sum_{\gamma_f\in\Gamma_h}\int_{\gamma_f} u^2\mathrm{d}S\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

定义本文中的有限元子空间

$$R_1(K) = \begin{cases} P_1(K), & \text{如果 } K \text{ 是三角形}, \\ Q_1(K), & \text{如果 } K \text{ 是四边形}. \end{cases}$$

定义连续的分片双线性速度子空间

$$X_h = \big\{\, v \in X : v_i\,|_K \in R_1(K),\ i = 1,2,\ \forall\,K \in T_h \,\big\},$$

和分片常数压力子空间

$$M_h = \big\{\, q \in M : q\,|_K \in P_0(K),\ \forall\,K \in \tau_h \,\big\},$$

则 X_h 和 Y_h 分别是速度和压力函数空间 X 和 Y 的有限元子空间。

于是下面经典的逼近结果成立[8]：

(H1):　逼近性

$$\|v - I_hv\|_0 + h^{\frac{1}{2}}\|v - I_hv\|_{\Gamma_h} + h\|v - I_hv\|_1 \le \kappa h^2\|v\|_2, \quad \forall\,v \in D(A), \tag{10}$$

$$\|q - J_hq\|_0 \le \kappa h\|q\|_1, \quad \forall\,q \in H^1(\Omega) \cap M. \tag{11}$$

其中 $I_h : D(A) \to X_h$ 是插值算子，$J_h : H^1(\Omega) \cap M \to M_h$ 是 L^2 正交投影。

为了弥补低阶协调有限元对 inf-sup 条件的不足，定义如下双线性形式的稳定化项

$$G(p,q)=(p-\Pi p,q-\Pi q), \tag{12}$$

其中 $\Pi: L^2(\Omega)\to R_1$ 是局部压力投影。

定常 Navier-Stokes 方程建立在局部压力投影上的稳定化有限元方法如下

$$\mathcal{B}_h\big((u_h,p_h);(v,q)\big)+b(u_h,u_h,v)=(f,v), \tag{13}$$

其中双线性形式

$$\mathcal{B}_h\big((u_h,p_h);(v,q)\big)=a(u_h,v)-d(v,p_h)+d(u_h,q)+G(p_h,q),\quad \forall\,(v,q)\in(X_h,M_h). \tag{14}$$

下面给出 Stokes 问题建立在局部压力投影上的稳定化有限元方法的稳定性。

定理 3.1[1,7] 令 (X_h,M_h) 是最低阶的协调有限元对。假设

$$\|\Pi p\|_0\le\kappa\|p\|_0,\quad \forall\,p\in L^2(\Omega),\qquad \|p-\Pi p\|_0\le\kappa h\|p\|_1,\quad \forall\,p\in H^1(\Omega), \tag{15}$$

成立，则存在与 h 无关的常数 $\beta>0$，满足

$$|\mathcal{B}_h((u,p);(v,q))|\le\kappa\big(\|u\|_1+\|p\|_0\big)\big(\|v\|_1+\|q\|_0\big),\quad \forall\,(u,p),(v,q)\in(X,M), \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\beta\big(\|u_h\|_1+\|p_h\|_0\big)\\ \le&\sup_{(v_h,q_h)\in(X_h,M_h)}\frac{|\mathcal{B}_h((u_h,p_h);(v_h,q_h))|}{\|v_h\|_1+\|q_h\|_0},\quad \forall\,(u_h,p_h),(v_h,q_h)\in(X_h,M_h).\end{aligned} \tag{17}$$

定理 3.2[5] 在定理 2.1 和定理 3.1 的假设条件下，问题 (13) 存在唯一的解 $(u_h,p_h)\in(X_h,M_h)$ 满足

$$\|u_h\|_1\le\frac{\gamma_0}{\nu}\|f\|_0,\quad \|p_h\|_0\le\beta^{-1}\big(c_0\nu^{-2}\gamma_0^3\|f\|_0^2+\gamma\|f\|_0\big). \tag{18}$$

4 误差估计

定义如下的 Stokes 投影 $(R_h,Q_h):(X,M)\to(X_h,M_h)$

$$\mathcal{B}_h\big((R_h(v,q),Q_h(v,q));(v_h,q_h)\big)=\mathcal{B}\big((v,q);(v_h,q_h)\big),\quad \forall\,(v_h,q_h)\in(X_h,M_h). \tag{19}$$

引理 4.1[5] 在定理 3.1 的假设条件下，对任意的 $(v,q)\in(D(A),H^1(\Omega)\cap M)$，Stokes 投影 (R_h,Q_h) 满足

$$\|v-R_h(v,q)\|_0+h\big(\|v-R_h(v,q)\|_1+\|q-Q_h(v,q)\|_0\big)\le\kappa h^2\big(\|v\|_2+\|q\|_1\big). \tag{20}$$

定理 4.2 在定理 2.1 和定理 3.2 的假设条件下，成立如下估计式

$$\|u-u_h\|_0+h\big(\|u-u_h\|_1+\|p-p_h\|_0\big)\le\kappa h^2. \tag{21}$$

证明 由 (7) 减 (13) 得

$$\mathcal{B}_h\big((e_h,\eta_h);(v_h,q_h)\big)+b(E+e_h,u,v_h)+b(u_h,E+e_h,v_h)=0, \tag{22}$$

其中 $E = u - R_h(u,p)$，式 (22) 中令

$$(v_h, q_h) = (e_h, \eta_h) = \big(R_h(u,p) - u_h, Q_h(u,p) - p_h\big),$$

由 (3) 可得

$$\nu\|e_h\|_1^2 + G(\eta_h,\eta_h) + b(e_h,u,e_h) \le |b(E,u,e_h)| + |b(u_h,E,e_h)|, \tag{23}$$

这里

$$\nu\|e_h\|_1^2 + b(e_h,u,e_h) \ge \nu\Big(1 - \frac{c_0\gamma^2}{\nu^2}\Big)\|e_h\|_1^2, \tag{24}$$

$$|b(E,u,e_h)| + |b(u_h,E,e_h)| \le c\big(\,\|u\|_1 + \|u_h\|_1\,\big)\|e_h\|_1\|E\|_1 \le \kappa h\|e_h\|_1. \tag{25}$$

从而有

$$\|e_h\|_1 \le \kappa h. \tag{26}$$

类似地，由 (13) 和 (7) 可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_h\big((e_h,\eta_h);(v_h,q_h)\big) + b(u,E+e_h,v_h)\\&+ b(E+e_h,u,v_h) - b(E+e_h,E+e_h,v_h) = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

令 $(v_h,q_h) = (e_h,\eta_h)$，得

$$\begin{aligned}&\nu\|e_h\|_1^2 + G(\eta_h,\eta_h) + b(e_h,u,e_h)\\ \le\ & |b(u,E,e_h)| + |b(E,u,e_h)| + |b(E,E,e_h)| + |b(e_h,E,e_h)|,\end{aligned} \tag{28}$$

再由 (5) 和 (24)，得到

$$\begin{aligned}\|e_h\|_1^2 \ \le\ & c|b(u,E,e_h)| + |b(E,u,e_h)| + |b(E,E,e_h)| + |b(e_h,E,e_h)|\\ \le\ & c\|u\|_2\|E\|_0\|e_h\|_1 + c\big(\,\|E\|_1 + \|e_h\|_1\,\big)\|E\|_1\|e_h\|_1 \le \kappa h^2\|e_h\|_1,\end{aligned} \tag{29}$$

即

$$\|e_h\|_1 \le \kappa h^2. \tag{30}$$

由 (H1) 和 (30) 得

$$\|u-u_h\|_0 \le \|e_h\|_0 + \|E\|_0 \le \gamma_0\|e_h\|_1 + \kappa h^2\big(\,\|u\|_2 + \|p\|_1\,\big) \le \kappa h^2, \tag{31}$$

$$\|u-u_h\|_1 \le \|e_h\|_1 + \|E\|_1 \le \kappa h^2 + \kappa h\big(\,\|u\|_2 + \|p\|_1\,\big) \le \kappa h, \tag{32}$$

利用 (6)，(9)，(15) 和 (16)，得

$$\begin{aligned}\|\eta_h\|_0 \ \le\ & \beta^{-1} \sup_{(v_h,q_h)\in(X_h,M_h)} \frac{|b(u-u_h,u,v_h) + b(u_h,u,v_h)|}{(\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0)}\\ \le\ & \kappa\big(\,\|u\|_1 + \|u_h\|_1\,\big)\|u-u_h\|_1 \le \kappa\|u-u_h\|_1,\end{aligned} \tag{33}$$

由三角不等式 (30) 和 (33)，得

$$\|p-p_h\|_0 \le \|p-Q_h(u,p)\|_0 + \|\eta_h\|_0 \le \kappa h\big(\|u\|_2 + \|p\|_1\big) + \kappa\|u-u_h\|_1 \le \kappa h. \qquad (34)$$

由 (20)，(31)，(32) 和 (34)，即得 (21) 成立。

5 数值实验

为了证明定理 4.2 中收敛率的正确性，本节考虑两个数值算例。稳定化项 (12) 中，局部压力投影 Π 的选取采用了 Bochev 在文献 [7] 中的技巧。对所有的数值实验，令 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，粘性系数 $\nu=0.05$。给定符合方程 (1)-(2) 的真解如下

$$u=\big(u_1(x,y),u_2(x,y)\big),\quad p(x,y)=10(x-0.5),$$

$$u_1(x,y)=10x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y),\quad u_2(x,y)=-10x(1-x)(1-2x)y^2(1-y)^2.$$

f 由方程 (1)-(2) 确定。

为了简单起见，我们把单位正方形剖分成 N^2 个正方形元或 $2N^2$ 个三角形元，N 是每个方向上等分的数量，步长 $h=\frac{1}{N}$。对 Q_1-P_0 元我们选取 7 个数值

$$h=\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{56},$$

对 P_1-P_0 元，我们选取 6 个数值

$$h=\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{24},\cdots,\frac{1}{48}.$$

表 1 和表 2 给出了定常 Navier-Stokes 方程的 L^2 误差和 H^1 误差的收敛率。从表 1 和表 2 可以看出，计算出的收敛率十分逼近第4部分理论上推导的数值。本文还给出了文献[5] 提出的局部稳定化方法的数值实验结果，表 3 至表 6 给出了建立在三角形、四边形剖分基础上随稳定化参数 β 变化的数值实验结果；图 1 至图 4 分别给出了速度相对误差 $\frac{\|u-u_h\|_1}{\|u\|_1}$ 和压力相对误差 $\frac{\|p-p_h\|_0}{\|p\|_0}$ 随稳定化参数变化的误差曲线。显然，文献 [5] 提出的局部稳定化有限元算法严重依赖于稳定化参数的选取。但本文应用的局部稳定化有限元算法不含有任何稳定化参数。总之，稳定化有限元算法[7] 是解决定常 Navier-Stokes 方程的一种有效的数值算法。

表 1: 压力投影稳定化方法的结果：Q_1-P_0

$1/h$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	rate	$\frac{\|u-u_h\|_{H_1}}{\|u\|_{H_1}}$	rate	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	rate
1/8	0.884633	/	0.68003	/	0.162006	/
1/16	0.24708	1.8401	0.25013	1.4429	0.0709912	1.1903
1/24	0.113165	1.9259	0.142334	1.3905	0.045025	1.1230
1/32	0.0645285	1.9526	0.0969954	1.3331	0.0329599	1.0843
1/40	0.0416172	1.9655	0.0727923	1.2864	0.0260071	1.0617
1/48	0.0290432	1.9730	0.0579639	1.2494	0.0214854	1.0476
1/56	0.0214106	1.9779	0.0480278	1.2198	0.0183084	1.0380

表 2:　压力投影稳定化方法的结果：$P_1 - P_0$

$1/h$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	rate	$\frac{\|u-u_h\|_{H_1}}{\|u\|_{H_1}}$	rate	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	rate
1/8	0.835232	/	0.682411	/	0.147155	/
1/16	0.240235	1.7977	0.268425	1.3461	0.062133	1.2439
1/24	0.111155	1.9008	0.158856	1.2938	0.0387494	1.1645
1/32	0.06370955	1.9347	0.111125	1.2421	0.0281026	1.1167
1/40	0.0412166	1.9516	0.0849661	1.2028	0.0220468	1.0876
1/48	0.0280234	2.1160	0.0686039	1.1732	0.0181435	1.0687

表 3:　稳定化方法[5]的结果：$Q_1 - P_0$，$\beta = 100$

$1/h$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	rate	$\frac{\|u-u_h\|_{H_1}}{\|u\|_{H_1}}$	rate	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	rate
1/8	0.0704952	/	0.26942	/	0.125015	/
1/16	0.0176969	1.9940	0.134964	0.9973	0.0625114	0.9999
1/24	0.0078708	1.9983	0.0900034	0.9992	0.0416761	0.9999
1/32	0.00442838	1.9992	0.0675092	0.9997	0.0312573	1.0000
1/40	0.00283447	1.9995	0.0540097	0.9998	0.0250055	1.0001
1/48	0.0019685	1.9997	0.0450091	0.9999	0.0208375	1.0001
1/56	0.00144629	1.9998	0.0385797	0.9999	0.0178603	1.0002

表 4:　稳定化方法[5]的结果：$P_1 - P_0$，$\beta = 100$

$1/h$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	rate	$\frac{\|u-u_h\|_{H_1}}{\|u\|_{H_1}}$	rate	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	rate
1/8	0.22867	/	0.483618	/	0.129906	/
1/16	0.0603546	1.9217	0.2418	1.0001	0.0607841	1.0957
1/24	0.0270818	1.9764	0.16104	1.0024	0.0394923	1.0635
1/32	0.0152898	1.9872	0.120708	1.0021	0.0292367	1.0452
1/40	0.00980483	1.9911	0.096528	1.0018	0.0232099	1.0345
1/48	0.0068174	1.9932	0.0804167	1.0016	0.0192439	1.0278

表 5:　稳定化方法[5]的结果：$Q_1 - P_0$，$\beta = 0.0001$

$1/h$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	rate	$\frac{\|u-u_h\|_{H_1}}{\|u\|_{H_1}}$	rate	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	rate
1/8	1.05741	/	2.03577	/	0.255142	/
1/16	0.285664	1.888146	1.05974	0.941864	0.126255	1.01496
1/24	0.129864	1.94426	0.718702	0.957745	0.0838239	1.01016
1/32	0.0738281	1.963116	0.542278	0.979095	0.0627407	1.00705
1/40	0.0475404	1.97254	0.435318	0.984577	0.0501346	1.00518
1/48	0.0331457	1.978189	0.363569	0.987857	0.0417486	1.00397
1/56	0.0244198	1.981953	0.31211	0.990027	0.0357671	1.00316

表6: 稳定化方法[5]的结果: $P_1 - P_0$, $\beta = 0.0001$

$1/h$	$\frac{\|u-u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$	rate	$\frac{\|u-u_h\|_{H_1}}{\|u\|_{H_1}}$	rate	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	rate
1/8	0.999998	/	0.999998	/	0.628319	/
1/16	0.99989	-0.43039	0.999753	0.672709	1.26295	-3.19701
1/24	0.99989	0	0.999894	-0.00035	1.89889	1.005806
1/32	0.999543	0.000158852	0.999557	0.001172	2.5337	-2.41014
1/40	0.999284	0.001161	0.999305	0.00113	3.16756	-1.00062
1/48	0.998967	0.00174	0.998997	0.001691	3.80049	-0.99916

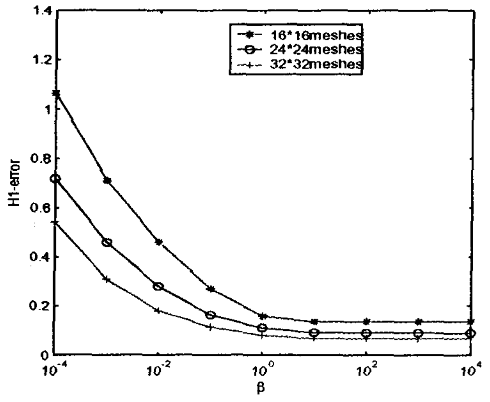

图1: 四边形剖份[5]的速度相对误差曲线

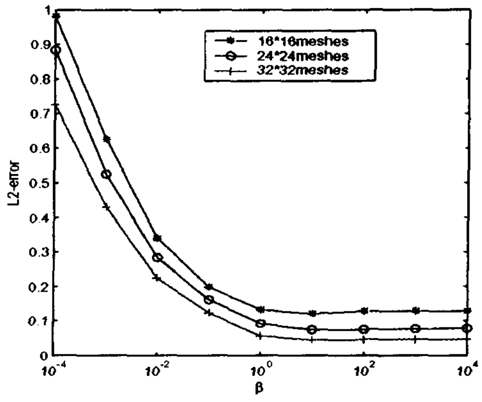

图2: 四边形剖份[5]的压力相对误差曲线

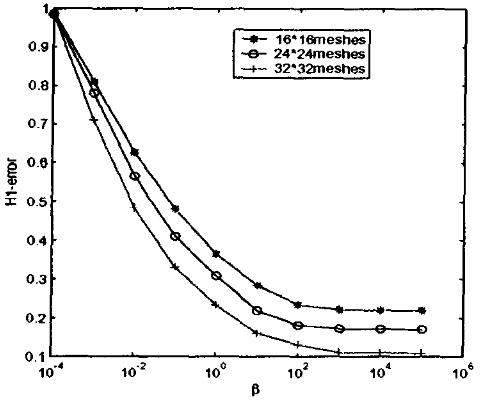

图3: 三角形剖份[5]的速度相对误差曲线

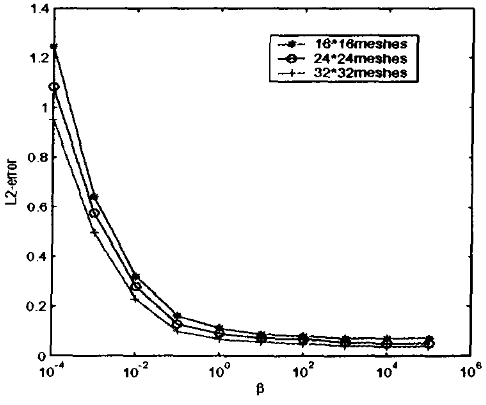

图4: 三角形剖份[5]的压力相对误差曲线

参考文献：

[1] Li J, He Y N. A stabilized finite element method based on two local Gauss integrations for the Stokes equations[J]. J Comp Appl Math, 2008, 214: 58-65

[2] Li J, *et al.* A multi-level stabilized finite element method for the stationary Navier-Stokes equations[J]. Comp Meth Appl Mech Engrg, 2007, 196: 2852-2862

[3] Blasco J, Codina R. Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection[J]. Comp Meth Appl Mech Engrg, 1993, 104: 31-48

[4] Codina R, Blasco J. Analysis of a pressure stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations[J]. Numer Math, 2000, 87: 59-81

[5] He Y N, *et al.* Stabilized finite-element method for the stationary Naver-Stokes equations[J]. J Engrg Math, 2005, 51: 367-380

[6] Kechkar N, Silverster D. Analysis of locally stabilized mixed finite element methods for the Stokes problem[J]. Math Comp, 2000, 21: 1321-1337

[7] Bochev P R, *et al.* Stabilization of low-order mixed finite elements[J]. SIAM J Numer Anal, 2004, 42: 1189-1208

[8] Temam R. Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis[M]. Amsterdam: North-Holland, 1984

Stabilization of the Lowest-order Mixed Finite Elements Based on the Local Pressure Projection for Steady Navier-Stokes Equations

WANG Ai-wen[1], LI Jian[2], XIE Dong-xiu[1]

(1- Department of Mathematics, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192; 2- Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721007)

Abstract: We present a stabilized finite element method based on the local pressure projection for the steady Navier-Stokes equations by the lowest order conforming finite element pairs (i.e. $Q_1 - P_0$; $P_1 - P_0$). In contrast to other stabilized methods, the new method is parameter free, it is not necessary to calculate higher order derivatives and edge-based data structures, and it is implemented at the element level with minimal cost. For the stabilized finite element solution, the optimal error estimates have been obtained. Finally, the numerical examples demonstrate the better stability and convergence of the stabilized finite element method for the Navier-Stokes equations.

Keywords: Navier-Stokes equations; stabilized finite element; lowest order pairs; local pressure projection

Received: 22 July 2008. **Accepted:** 26 Feb 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10701001); the Construction Project of Beijing Famous Teacher (61N0810810); the Beijing Information Science and Technology University Fund (5026010945); the Scientific Creative Platform Foundation of Beijing Municipal Commission of Education (PXM2008-014224-067420).